ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THÁI SƠN

VỀ TÍNH CHẤT COFINITE VÀ TÍNH CHẤT KHÔNG TRIỆT TIÊU CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THÁI SƠN

VỀ TÍNH CHẤT COFINITE VÀ TÍNH CHẤT KHÔNG TRIỆT TIÊU CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG**

THÁI NGUYÊN - 2020

Thái Nguyên, năm 2018

Lời cảm ơn

Để thực hiện tốt luận văn này, ngoài sự cố gắng nỗ lực của bản thân, tôi đã nhận được sự quan tâm, giúp đỡ từ thầy cô, bạn bè và gia đình. Nhân đây tôi xin được gửi lời cảm ơn. Trước hết tôi xin gửi lời cảm ơn quý Thầy Cô trong khoa toán trường Đại Học Sư Phạm – Đại Học Thái Nguyên và quý Thầy Cô của viện toán học Việt Nam đã truyền thụ và giảng dạy những kiến thức bổ ích, làm nền tảng cho tôi trong quá trình nghiên cứu luận văn này. Và hơn hết, tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc đến Thầy PGS.TS Nguyễn Văn Hoàng, người đã tận tình hướng dẫn, dạy bảo tôi phương pháp nghiên cứu khoa học và tạo mọi điều kiện để tôi có thể hoàn thành luận văn này. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý Thầy Cô trong hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian xem xét, chỉnh sửa và đưa ra những nhận xét quý báu để luận văn của tôi được hoàn thiện. Bên cạnh sự chỉ dạy của thầy cô, tôi cũng nhận được sự quan tâm của gia đình và bạn bè. Xin chân thành cảm ơn mọi người.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Mục lục

MỞ ĐẦU **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Tập Ass, Supp của môđun 3

1.2 Môđun Ext 5

1.3 Độ sâu, chiều và hệ tham số của môđun 6

1.4 Môđun đối đồng điều địa phương 7

1.5 Vành và môđun Cohen-Macaulay 12

1.6 Môđun I-cofinite 13

2 Về tính chất cofinite và tính chất không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương **14**

2.1 Môđun đối đồng điều địa phương trên vành đầy đủ 14

2.2 Môđun đối đồng điều địa phương trên vành địa phương Noether. 18

2.3 Môđun đối đồng điều địa phương của iđêan sinh bởi một phần hệ tham số 26

Kết luận **30**

Tài liệu tham khảo **32**

MỞ ĐẦU

Như giả thiết, vành R là vành giao hoán Noether có phần tử đơn vị khác với phần tử không. Với mỗi iđêan I của R và mỗi R-môđun M, khái niệm *môđun đối đồng điều địa phương* thứ i của M đối với giá I được định nghĩa bởi công thức

$$H_I^i(M) = \varinjlim_n \operatorname{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

Những kiến thức chi tiết hơn về lớp môđun đối đồng điều địa phương được trình bày trong các tài liệu [5], [7].

Trong bài báo [9], C. Huneke đã nêu câu hỏi sơ khai như sau:
Cho $W = \{\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) + \operatorname{ht}(I + \mathfrak{p})/\mathfrak{p} : I \nsubseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M\}$*. Khi đó phát biểu sau đây liệu có đúng hay không:* $0 \leq n \notin W$ *nếu và chỉ nếu* $H_I^n(M)$ *là* R*-môđun hữu hạn sinh?*

Liên quan đến câu hỏi sơ khai này, ta có thể xem thêm trong bài báo [12]. Năm 2014, Bagheriyeh - Bahmanpour - A'zami [3] chứng minh được một kết quả tương tự cho câu hỏi đã nêu trên trong trường hợp R là một vành địa phương đầy đủ và I là iđêan cực đại của R.

Năm 1969, Grothendieck đã nêu giả thuyết rằng, nếu I là một iđêan của R và M là R-môđun hữu hạn sinh, thì R-môđun $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^i(M))$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$. R. Hartshorne đã xây dựng một phản ví dụ cho giả thuyết này [8]; đồng thời, ông cũng định nghĩa một môđun T là I-cofinite nếu $\operatorname{Supp} T \subseteq \operatorname{Var}(I)$ và $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, T)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$, và ông cũng hỏi câu hỏi sau đây.
Với những vành R *và iđêan* I *nào thì các môđun* $H_I^i(M)$ *là* I*-cofinite với mọi* i *và mọi môđun hữu hạn sinh* M*?*

Hartshorne đã chứng minh rằng, nếu I là một iđêan của vành địa phương chính quy đầy đủ R và M là R-môđun hữu hạn sinh, thì $H_I^i(M)$ là I-cofinite trong hai trường hợp sau đây:

- (i) I là iđêan chính (xem [8, Hệ quả 6.3]),
- (ii) I là iđêan nguyên tố với $\dim R/I = 1$ (xem [8, Hệ quả 7.7]).

Chủ đề này được tiếp tục nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác sau đó (xem

[1], [4], [6], [10], [14], [20]).

Trong bài báo [3], Bagheriyeh - Bahmanpour - A'zami đã chứng minh được một số kết quả mới liên quan đến môđun đối đồng điều địa phương cofinite và tính triệt tiêu của một số môđun đối đồng điều địa phương.

Mục đích của luận văn này là trình bày chi tiết lại những kết quả được trình bày trong bài báo [3], một số kiến thức bổ trợ ở Chương 1 được tham khảo ở các cuốn sách [5] và [15], ngoài ra một số kiến thức bổ sung cần thiết khác được dùng trong Chương 2 được tham khảo trong các tài liệu còn lại.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm trình bày một số kiến thức cơ sở nền tảng để người đọc dễ theo dõi các kiến thức được trình bày ở Chương 2. Chương này trình bày vắn tắt về tập Ass, Supp, môđun Ext, độ sâu, chiều, hệ tham số, môđun đối đồng điều địa phương, vành và môđun Cohen - Macaulay. Ta giả thiết chung ở đây rằng R là vành giao hoán Noether có đơn vị khác phần tử không. Những kiến thức ở chương này chủ yếu được tham khảo từ các cuốn sách: "Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications" của M. P. Brodmann - R. Y. Sharp (1998) (xem [5]) và "Commutative ring theory" của H. Matsumura (1986) (xem [15]), ngoài ra mục cuối của chương này nhắc lại một số kiến thức về tính chất cofinite của môđun (trích trong một số bài báo [18], [2], [8]).

1.1 Tập Ass, Supp của môđun

Định nghĩa 1.1.1. Cho M là một R-môđun. Iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại một phần tử $x \in M$ sao cho $\operatorname{ann}_R(x) = \mathfrak{p}$ (để ý rằng, vì $\mathfrak{p} \neq R$ nên $x \neq 0$). Tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M kí hiệu là $\operatorname{Ass}_R(M)$ (hoặc $\operatorname{Ass} M$) và gọi là *tập iđêan nguyên tố liên kết* của M.

Định nghĩa 1.1.2. Cho M là R-môđun. Tập *giá* của môđun M kí hiệu là $\operatorname{Supp}(M)$, được xác định bởi công thức

$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Nhận xét 1.1.3. Cho I là iđêan của R. Ta đặt

$$\operatorname{Var}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

Nếu M là $R-$môđun hữu hạn sinh thì

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Var}(\operatorname{ann}(M)),$$

trong đó $\operatorname{ann}(M) = (0 :_R M)$. Rõ ràng ta có

$$\operatorname{Supp}(R/I) = \operatorname{Var}(I).$$

Mệnh đề 1.1.4. *Giả sử M là R-môđun khác 0 và $\mathfrak{p}$ là phần tử tối đại trong tập các iđêan linh hóa tử của các phần tử $0 \neq x \in M$. Khi đó $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố. Do đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.*

Hệ quả 1.1.5. *Nếu R là một vành Noether và M là một R-môđun khác 0, thì tồn tại một iđêan nguyên tố liên kết của M. Do đó trong trường hợp này* $\operatorname{Ass} M \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi* $M \neq 0$.

Hệ quả 1.1.6. *Nếu R là một vành Noether và M là một R-môđun Noether khác 0. Khi đó tồn tại chuỗi các môđun con*

$$0 = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \ldots \subseteq M_2 \subseteq M_1 = M$$

sao cho mỗi môđun thương M_i/M_{i+1} đẳng cấu với $R/\mathfrak{p}_i$ trong đó $\mathfrak{p}_i$ là một iđêan nguyên tố nào đó của R.

Định nghĩa 1.1.7. Cho M là R-môđun. Phần tử $x \in R$ được gọi là *ước của không* của M nếu tồn tại $0 \neq m \in M$ sao cho $xm = 0$. Tập tất cả các ước của không của M được kí hiệu là $\operatorname{Zdv}_R(M)$.

Mệnh đề 1.1.8. *Cho R là vành Noether, M là một R-môđun khác 0. Khi đó tập các ước không của M là hợp của tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M. Nói cách khác, ta có*

$$\operatorname{Zdv}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}.$$

Mệnh đề 1.1.9. *Cho R là vành Noether, M là một R-môđun hữu hạn sinh, N là một R-môđun bất kì. Khi đó*

$$\operatorname{Ass}_R(\operatorname{Hom}_R(M, N)) = \operatorname{Ass}(N) \cap \operatorname{Supp}(M).$$